

Digitalna obrada signala

Laboratorijska vježba 4

20. decembar 2022.

Šum. DFT zašumljenog signala. Transformacije analognih sistema u diskretne. Funkcije `filter`, `freqz`, `zplane`, `impz`

Teorijska osnova vježbe

U sklopu ovih laboratorijskih vježbi biće pokazano na koji način je moguće generisati šum i sa njim kontaminirati signal. Biće razmatrano i kako je moguće u MATLAB/Octave okruženju koristiti metod istog odziva i bilinearnu transformaciju, pomoću kojih je moguće transformisati analogne sisteme u diskretne. Dodatno, biće predstavljene funkcije za računanje odziva diskretnih sistema zadatih prenosnim funkcijama, kao i mogućnost prikazivanja frekvencijskih karakteristika sistema.

Šum

Šum je slučajni proces koji kontaminira signale, a uzrokovan je različitim neželjenim fizičkim procesima, ograničenjima i fenomenima koji prate akviziciju (mjerenje, prikupljanje) signala, njihov prenos, skladištenje i obradu. Šumom se mogu modelovati različiti neželjeni fenomeni, kao što su, na primjer, greške usljed kvantizacije signala. Šum je neželjena pojava, koja može učiniti nedostupnim, ili u manjoj ili većoj mjeri degradiranim, korisne informacije sadržane u signalima. Stoga su modelovanje, uklanjanje i redukcija šuma veoma bitne teme u oblasti digitalne obrade signala.

Postoje različite vrste i klase šumova. Prema svojoj prirodi, šum može biti aditivan ili multiplikativan. Postoje različite vrste šumova u zavisnosti od funkcija gustina vjerovatnoća (odnosno raspodjele) kojima podliježu amplitude šuma. Postoje i različite vrste šumova, zavisno od vrste i prirode korelacije između odbiraka ovih slučajnih procesa. Šum će biti detaljno proučavan u sklopu predmeta Slučajni procesi.

U sklopu ovih vježbi, fokusiraćemo se na aditivni, bijeli (i stacionarni) šum. Razmatraće se dvije vrste raspodjele: Gausova i uniformna.

Bijeli Gausov šum $w(n)$ se obično zadaje sa odgovarajućom srednjom vrijednošću i varijansom. Srednja vrijednost, μ_w , je najvjerovatnija vrijednost koja se pojavljuje u ovom slučajnom signalu (odgovara vrhu Gausove krive), dok je varijansa, σ_w^2 , mjera raširenosti signala oko njegove srednje vrijednosti. Drugim riječima, varijansa je srednje kvadratno odstupanje od srednje (očekivane) vrijednosti signala. Njen kvadratni korijen je poznat kao standardna devijacija, σ_w .

Primjer

Generisati bijeli Gausov šum $w_1(n)$ srednje vrijednosti $\mu_{w_1} = 0$ i $w_2(n)$ srednje vrijednosti $\mu_{w_2} = 3$. Oba šuma su varijanse $\sigma_{w_1}^2 = \sigma_{w_2}^2 = 4$ (standardne devijacije $\sigma_{w_1} = \sigma_{w_2} = 2$), i dužine $N = 10000$ odbiraka. Za zadate realizacije ovih signala, provjeriti srednju vrijednost i varijansu, prikazati histograme signala kao i signale.

Bijeli Gausov šum je u MATLAB/Octave okruženju moguće generisati funkcijom `randn(1,N)`, koja generiše pseudo-slučajnu sekvencu dužine N odbiraka, sa Gausovom raspodjelom, jedinične varijanse i srednje vrijednosti jednake 0. Odgovarajuća varijansa i srednja vrijednost iz postavke se mogu zadati kao što je prikazano u donjem kodu.

```
1 N=10000;
2 ss=2; % standardna devijacija
3 w1=ss*randn(1,N);
4 w2=3+ss*randn(1,N);
```

Svakim pozivom `randn` funkcije, generiše se nova pseudo-slučajna sekvenca bijelog Gausovog šuma sa zadatim karakteristikama. Pošto je ovaj signal stacionaran i ergodičan, to je njegovu srednju vrijednost i varijansu moguće procijeniti iz pojedinačnih realizacija. Zato je sa povećanjem dužine N moguće dobiti precizniju procjenu varijanse i srednje vrijednosti, iz pojedinačnih realizacija signala. Ovo nije uvijek slučaj u praksi. Ukoliko se, na primjer, šum doda sinusoidalnom signalu, dobiće se kao rezultat novi slučajni signal sa srednjom vrijednošću koja je funkcija od n . Srednju vrijednost i varijansu (stacionarnih, ergodičnih procesa) možemo provjeriti sljedećim naredbama:

```
1 mean(w1), var(w1)
2 mean(w2), var(w2)
```

Histogram predstavlja grafik na kojem se prikazuje broj elemenata datog vektora (signala) koji zauzima zadate opsege vrijednosti na apscisnoj osi (amplituda signala). Funkcijom `hist(x,B)`, interval mogućih vrijednosti amplituda se dijeli na B podintervala, te se za svaki prikazuje broj odbiraka signala koji pripadaju tom opsegu. Moguće je razmatrane opsege i vrijednosti prikazane na histogramu smjestiti u promjenljive, npr. `[h,opsezi]=hist(x,B)`. Ovu mogućnost nećemo koristiti u našem primjeru.

```
1 figure(1), hist(w1,20)
2 xlabel('Amplituda'), ylabel('Broj odbiraka')
3
4 figure(2), hist(w2,20)
5 xlabel('Amplituda'), ylabel('Broj odbiraka')
```

Nacrtajmo dvije posmatrane realizacije signala. Napomenimo da je ovdje preporučljivo koristiti funkciju `plot` (umjesto `stem`), radi bolje preglednosti, posebno imajući u vidu veliku dužinu signala.

```
1 figure(3), plot(0:N-1,w1), xlabel('n'), ylabel('w1(n)')
2 figure(4), plot(0:N-1, w2), xlabel('n'), ylabel('w2(n)')
```

Uniformni šum se može generisati primjenom funkcije `rand(1,N)`. Time se dobija sekvenca od N elemenata, sa realnim vrijednostima iz otvorenog intervala $(0,1)$. Uniformna raspodjela znači da su sve vrijednosti slučajnog signala jednako vjerovatne. Vrijednosti na proizvoljnom intervalu (a,b) se dobijaju jednostavnim skaliranjem i pomjeranjem originalnog intervala.

Primjer

Generisati bijeli uniformni šum, sa vrijednostima amplituda na interevalu $(-1,3)$. Posmatrati slučajni signal treba da bude dužine $N = 100000$ odbiraka. Prikazati signal i histogram signala. Izračunati srednju vrijednost i varijansu.

```
1 N=10000;
2 a=-1; b=3;
3 w=a+(b-a).*rand(1,N);
4 figure(1)
5 subplot(2,1,1), plot(0:N-1,w), xlabel('n'), ylabel('w(n)')
6 subplot(2,1,2), hist(w,50), xlabel('Amplituda'), ylabel('Broj odbiraka')
7 mean(w), var(w)
```

U nastavku, posmatrajmo deterministički signal (sumu sinusoida), koji je zahvaćen šumom.

Primjer

Deterministički signal $s(n) = \sin\left(\frac{20\pi n}{N}\right) + 3\cos\left(\frac{46\pi n}{N}\right) + 4\sin\left(\frac{70\pi n}{N} + \frac{\pi}{3}\right)$ zahvaćen je aditivnim, bijelim, Gausovim šumom sa srednjom vrijednošću 0 i sa varijansom $\sigma_w^2 = 16$. Prikazati originalni i zašumljeni signal, kao i njihove DFT koeficijente. Spektar prikazati sa diskretnim frekvencijskim indeksima $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, odnosno, koristiti `fftshift` funkciju.

```
1 N=256;
2 n=0:N-1;
3 k=-N/2:N/2-1;
4
5 s=1*sin(2*10*pi*n/N)+3*cos(2*23*pi*n/N)+4*sin(2*35*pi*n/N+pi/3);
6 S=fft(s);
7
8 x=s+4*randn(1,N);
9 X=fft(x);
10
11
12 figure(1)
13 subplot(2,1,1)
14 plot(n,s), xlabel('n'), ylabel('s(n)'), axis tight
15
16 subplot(2,1,2)
17 plot(k,abs(fftshift(S))), xlabel('n'), ylabel('|S(k)|'), grid on, axis tight
18
19 figure(2)
20 subplot(2,1,1)
21 plot(n,x), xlabel('n'), ylabel('x(n)'), axis tight
22
23 subplot(2,1,2)
24 plot(k,abs(fftshift(X))), xlabel('n'), ylabel('|X(k)|'), grid on, axis tight
```

Transformacije analognih sistema u diskretne

Postoji više metoda kojima je moguće transformisati analogne sisteme, zadate prenosnom funkcijom $H_a(s)$ u njihov diskretni ekvivalent, zadat prenosnom funkcijom $H(z)$. U sklopu ovih vježbi, biće razmatrani samo:

- bilinearna transformacija i
- metod istog impulsnog odziva.

Bilinearna transformacija (Tjustinov metod), koja je specijalni slučaj konformnog preslikavanja iz kompleksne analize, može se uvijek primijeniti, i postiže se uvođenjem smjene:

$$s \leftarrow \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

gdje je Δt korak odabiranja. Jedan od nedostataka ove tehnike je nelinearna veza između analogne frekvencije (za koju je dizajniran analogni sistem) i odgovarajuće diskretne frekvencije:

$$\Omega_a = \frac{2}{\Delta t} \tan\left(\omega \frac{\Delta t}{2}\right).$$

U MATLAB/Octave okruženju, bilinearna transformacija $H_a(s) = \frac{A_a(s)}{B_a(s)} \rightarrow H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ se može obaviti naredbom:

```
1 [Ad,Bd]=bilinear(A,B,fo);
```

gdje je $f_o = \frac{1}{\Delta t}$ frekvencija odabiranja.

Primjer

Transformisati u diskretni sistem analogni sistem čija je funkcija prenosa:

$$H_a(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

primjenom bilinearne transformacije. Za korak odabiranja uzeti $\Delta t = 1$.

```
1 [A,B]=bilinear([1,-3,3],[1,3,3],1)
```

Dobija se rezultat:

```
1 A =
2     0.0769    -0.1538     1.0000
3 B =
4     1.0000    -0.1538     0.0769
```

Primijetiti da je rezultat skaliran, tako da je u vektoru B prvi koeficijent jednak jedinici. Rezultat sa računskih vježbi se može dobiti množenjem oba vektora sa 13.

Kod **metoda istog impulsnog odziva**, cilj je dobiti diskretni sistem čiji je impulsni odziv $h(n)$ takav da on sadrži vjerodostojne odbirke impulsnog odziva $h_a(t)$ posmatranog analognog sistema.

Metod istog impulsnog odziva može se primijeniti kada je zadovoljeno

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |H_a(j\Omega)| \rightarrow 0.$$

U suprotnom, treba koristiti bilinearnu transformaciju. Metodom istog impulsnog odziva se analogna funkcija prenosa:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^L \frac{k_i}{s - s_i}$$

transformiše u diskretnu funkciju prenosa datu sljedećom relacijom:

$$H(z) = \sum_{i=1}^L \frac{k_i \Delta t}{1 - z^{-1} e^{s_i \Delta t}},$$

gdje je Δt korak odabiranja. Dodatno, ukoliko je ispunjeno:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) \neq 0$$

to znači da je u analognom impulsnom odzivu postojao diskontinuitet u $t = 0$, pa je dobijenu funkciju prenosa potrebno korigovati u:

$$H(z) - \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} H(z).$$

U slučaju da se u funkciji prenosa analognog sistema pojavljuje pol višestrukosti m , koristi se sljedeća relacija:

$$\frac{k_i}{(s - s_i)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{da^{m-1}} \left(\frac{k_i}{s - a} \right) \Big|_{a=s_i}.$$

Primjer

Metodom istog impulsnog odziva transformisati analogni sistem

$$H_a(s) = \frac{s + \frac{3}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$

u diskretni, primjenom metoda istog impulsnog odziva, sa korakom $\Delta t = 1$.

```
1 [A,B]=impinvar([1,3/2],[1,3/2,1/2],1)
```

Koeficijenti su:

```
1 A =  
2     1.0000    -0.1292  
3 B =  
4     1.0000    -0.9744     0.2231
```

Korisne funkcije za rad sa diskretnim sistemima

Impulsni odziv je u svim prethodnim slučajevima diskretne funkcije prenosa oblika

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

moguće dobiti primjenom funkcije `impz`:

```
1 h=impz(A,B)  
2 stem(h,'. '), xlabel('n'), ylabel('h(n)')
```

Funkcija automatski računa potrebnu dužinu impulsnog odziva. Podrazumijevana frekvencija odabiranja je $f_o = 1$, a može se drugačije zadati trećim ulaznim argumentom.

Dijagram nula i polova je moguće prikazati funkcijom `zplane`.

```
1 zplane(A,B)
```

Frekvencijsku i faznu karakteristiku sistema je moguće prikazati funkcijom `freqz`:

```
1 freqz(A,B)
```

Diskretna frekvencija je prikazana skalirano na opsegu $[0, 1)$ (podijeljena je sa π , a inače se računa na intervalu $[0, \pi)$). Vrijednosti prikazane na osama je moguće dobiti u vidu izlaznih argumenta:

```
1 [H,w]=freqz(A,B)
```

gdje je w diskretna frekvencija ω bez skaliranja, na opsegu od $[0, \pi)$ (pretpostavlja se da je impulsni odziv realan, pa se prikazuje i računa samo dio na pozitivnim frekvencijama).

Odziv sistema (u vremenskom domenu), na zadati ulazni signal $x(n)$, za posmatrani diskretni sistem sa funkcijom prenosa $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ se može dobiti upotrebom funkcije `filter`:

```
1 x=zeros(1,30);  
2 x(1)=1; x(2)=1;  
3 y=filter(A,B,x);  
4 stem(0:length(y)-1,y), xlabel('n'), ylabel('Odziv y(n)')
```

gdje je posmatran ulazni signal $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$, za $n = 0, 1, \dots, 29$. Voditi računa da je izlazni signal veće dužine (konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva koji odgovara razmatranoj funkciji prenosa).

Zadaci

1. Generisati sljedeće signale:

- (a) Bijeli Gauss-ov šum, varijanse $\sigma_x^2 = 3$, srednje vrijednosti $\mu_x = 1$. Nacrtati histogram generisanog signala.
- (b) Bijeli šum sa uniformnom raspodjelom, sa amplitudama u opsegu od -2 do 2 . Nacrtati histogram generisanog signala.
- (c) Kompleksni bijeli Gauss-ov šum, srednje vrijednosti nula, sa statistički nezavisnim realnim i imaginarnim dijelom. Varijansa realnog i imaginarnog dijela su jednake, tako da je ukupna varijansa šuma $\sigma_x^2 = 3$.
- (d) Laplasov impulsni šum $w(n) = w_1(n)w_2(n) + w_3(n)w_4(n)$, gdje su $w_1(n)$, $w_2(n)$, $w_3(n)$ i $w_4(n)$ nezavisne realizacije bijelog Gausovog šuma srednje vrijednosti nula.

Za generisane signale provjeriti numerički njihove statističke karakteristike (srednju vrijednost, varijansu i standardnu devijaciju).

2. Posmatra se signal $s(n) = \sin(20\pi n/N)$ generisan za $n = 0, 1, \dots, n-1$, gdje je $N = 200$. Signalu treba dodati aditivni bijeli Gauss-ov šum, srednje vrijednosti $\mu_w = 0$ i standardne devijacije $\sigma_w = 0.5$, dako da se formira zašumljeni signal $x(n) = s(n) + w(n)$.

(a) Prikazati amplitudski spektar $|S(k)|$ kao i amplitudski spektar $|X(k)|$.

(b) Odrediti varijansu slučajne promjenljive $X(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$.

3. Šum iz prethodnog zadatka propustiti kroz linearni, vremenski invarijantni sistem sa koeficijentima impulsnog odziva datim u vektoru $h = [1, 3, 1, 2, -1, 0, 1]$. Naći srednju vrijednost i varijansu ulaznog i izlaznog signala.

4. Dati su analogni sistemi koji imaju prenosne funkcije:

(a)

$$H_a(s) = \frac{s^2 - s + 3}{s^2 - 3s + 3}$$

(b)

$$H_a(s) = \frac{-3s + 1}{s^2 - 0.4s + 1}$$

Transformisati date analogne sisteme u diskretne sisteme korišćenjem: (1) bilinearne transformacije (2) metodom istog impulsnog odziva. Za frekvencije odabiranja uzeti pod $f_o = 10$ Hz, a pod b) $f_o = 20$.

5. Posmatra se diskretni kauzalni sistem definisan funkcijom prenosa:

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}$$

- (a) Odrediti i nacrtati odziv sistema na signal $x(n) = u(n) - u(n-20)$.
- (b) Nacrtati dijagram nula i polova.
- (c) Provjeriti stabilnost ovog sistema. Da li je sistem stabilan?